

МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ ЗА УЧЕНИЦИ

ОТ XI И XII КЛАС

13 април 2013 г.

Задача 1. (6 т.) Едно от решенията на уравнението

$$xy - xz + yt = 182$$

е съставено от числата 12, 14, 37 и 65. Да се намери съответствието между числа и неизвестни.

Задача 2. (14 т.) Да се определят всички стойности на  $k$ , за които системата

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} = 1 \end{cases}$$

има решение в положителни числа и да се намерят съответните решения.

Задача 3. (9 т.) Една от страните на  $\triangle ABC$  е два пъти по-голяма от друга страна на триъгълника, а ъгълът при върха В е два пъти по-малък от ъгъла при върха А. Да се намерят ъглите на триъгълника.

Задача 4. (11 т.) Медицентърът на равнобедрен триъгълник с основа  $a$  и бедро  $b$  е точка от вписаната в него окръжност.

а) Да се докаже, че

$$5a^2 + 4b^2 = 180r^2,$$

където  $r$  е радиусът на вписаната окръжност;

б) Да се намери  $r$ , ако периметърът на триъгълника е корен на уравнението

$$\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = x^2 - 3x + \frac{13}{4}.$$